Corso di Chimica-Fisica
A.A. 2008/09

Prof. Zanrè Roberto
E-mail: roberto.zanre@gmail.com
Oggetto: corso chimica-fisica

Esercizi: i Vettori

Appunti di lezione

Indice

Roberto Zanrè

In tutti gli esercizi di queste dispense i **vettori** verranno rappresentati con le lettere dell'alfabeto, in grassetto.

Somma di vettori

Se una particella compie prima uno spostamento da A a B, rappresentato dal vettore $\mathbf{d_1}$, e successivamente uno spostamento da B a C, rappresentato da $\mathbf{d_2}$, il risultato è equivalente a un singolo spostamento da A a C, rappresentato dal vettore $\mathbf{d}$. Scriviamo quindi simbolicamente: $\mathbf{d} = \mathbf{d_1} + \mathbf{d_2}$. La somma vettoriale è **commutativa** (è uguale il risultato invertendo l'ordine in cui vengono sommati i vettori).

Somma di due vettori

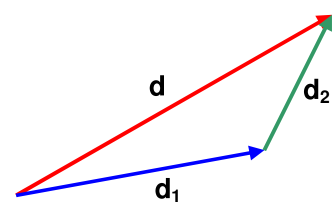

Fig. 1

Per calcolare il modulo di **d** vediamo dalla **Fig. 2** che $(AC)^2 = (AD)^2 + (DC)^2$. Ma $AD = AB + BD = d_1 + d_2 \cdot \cos\theta$ e $DC = d_2 \cdot \mathrm{sen}\theta$. Pertanto: $d^2 = (d_1 + d_2 \cdot \cos\theta)^2 + (d_2 \cdot \mathrm{sen}\theta)^2 =$

$\mathbf{d^2} = d_1^2 + d_2^2 \cdot \cos^2\theta + 2 \cdot d_1 \cdot d_2 \cdot \cos\theta + d_2^2 \cdot \mathrm{sen}^2\theta = \mathbf{d_1^2 + d_2^2 + 2 \cdot d_1 \cdot d_2 \cdot \cos\theta}$, o anche:

$$d = (d_1^2 + d_2^2 + 2 \cdot d_1 \cdot d_2 \cdot \cos\theta)^{1/2}$$

$$d = (d_1^2 + d_2^2 + 2 \cdot d_1 \cdot d_2 \cdot \cos\theta)^{1/2}$$

$$\frac{d}{\sin\theta} = \frac{d_1}{\sin\boldsymbol{\beta}} = \frac{d_2}{\sin\boldsymbol{\alpha}}$$

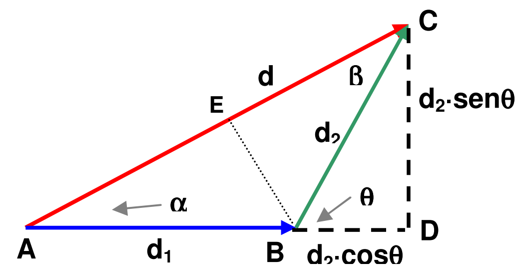

Fig. 2

Per determinare la direzione di **d** è necessario soltanto trovare l'angolo α. Dalla figura vediamo che nel triangolo (rettangolo) ACD si ha: $CD = AC \cdot \mathrm{sen}\alpha$, mentre nel triangolo (rettangolo) BCD si ha: $CD = BC \cdot \mathrm{sen}\theta$. Di conseguenza si possono uguagliare queste due espressioni:

$AC \cdot \mathrm{sen}\alpha = BC \cdot \mathrm{sen}\theta$; $d \cdot \mathrm{sen}\alpha = d_2 \cdot \mathrm{sen}\theta$; per cui: $\dfrac{d}{\sin\theta} = \dfrac{d_2}{\sin\boldsymbol{\alpha}}$

Analogamente: $BE = d_1 \cdot \mathrm{sen}\boldsymbol{\alpha} = d_2 \cdot \mathrm{sen}\boldsymbol{\beta}$; per cui: $\dfrac{d_2}{\sin\boldsymbol{\alpha}} = \dfrac{d_1}{\sin\boldsymbol{\beta}}$

Combinando i due risultati ottenuti, si ottiene la relazione simmetrica:

$$\frac{d}{\sin\theta} = \frac{d_1}{\sin\boldsymbol{\beta}} = \frac{d_2}{\sin\boldsymbol{\alpha}}$$

Nel caso particolare in cui $\mathbf{d_1}$ e $\mathbf{d_2}$ sono <u>perpendicolari</u>, allora $\theta = \frac{\pi}{2}$, quindi:

$$\mathbf{d} = (\mathbf{d_1}^2 + \mathbf{d_2}^2)^{1/2} \quad \text{e} \quad \tan\boldsymbol{\alpha} = \frac{d_2}{d_1}$$

Differenza di vettori

La differenza fra due vettori si ottiene aggiungendo al primo il negativo (od opposto) del secondo; cioè:

$$\mathbf{d} = \mathbf{d_1} - \mathbf{d_2} = \mathbf{d_1} + (-\mathbf{d_2}).$$

E' da osservare che: $\mathbf{d_2} - \mathbf{d_1} = \mathbf{d_2} + (-\mathbf{d_1}) = -(\mathbf{d_1} - \mathbf{d_2}) = -\mathbf{d}$; cioè, se i due vettori sono sottratti in ordine inverso, si ottiene il **vettore opposto**. Ciò significa che la **differenza vettoriale** è **anticommutativa**. Il **modulo** della differenza è dato da:

$$d = (d_1^2 + d_2^2 + 2 \cdot d_1 \cdot d_2 \cdot \cos(\pi - \theta))^{1/2}, \quad \text{o:}$$

$$d = (d_1^2 + d_2^2 - 2 \cdot d_1 \cdot d_2 \cdot \cos\theta)^{1/2}.$$

Esercizio 1.

Sono dati due vettori: **A** ha lunghezza di 6 unità e forma un angolo di +36° col semiasse positivo delle x; **B** ha una lunghezza di 7 unità ed è nella direzione del semiasse x negativo.
Trovare a) la somma dei due vettori; b) la differenza fra i due vettori.

Esercizio 1
Vettore somma

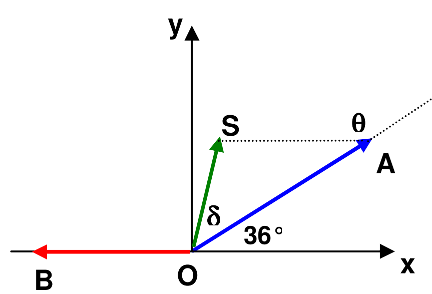

Fig. 3

a) In **Fig. 3** i due vettori sono stati disegnati su un sistema di assi coordinati. Per poter <u>sommare</u> i due vettori occorre portare l'estremo di uno a coincidere con l'origine dell'altro. Il vettore somma è

A + **B** = **S**. Con riferimento al triangolo **OSA**, calcoliamo il modulo del vettore somma **S**. Dalla figura è evidente che $\boldsymbol{\theta} = 180° - 36° = 144°$. Quindi:

$d = (d_1^2 + d_2^2 + 2 \cdot d_1 \cdot d_2 \cdot \cos\theta)^{½} = S = (6^2 + 7^2 + 2 \cdot 6 \cdot 7 \cdot \cos 144°)^{½}$ = **4.128** unità;

Per trovare l'angolo fra **S** e **A**, applichiamo l'equazione opportuna: $\dfrac{S}{\sin\theta} = \dfrac{B}{\sin\boldsymbol{\delta}}$; quindi:

$$\sin\boldsymbol{\delta} = \frac{B \cdot \sin\theta}{S} = \frac{B \cdot \sin 144°}{S} = \mathbf{0.996} \qquad \text{e} \qquad \boldsymbol{\delta} \cong \mathbf{85°}.$$

Dunque il vettore **S** ha una lunghezza di 4.128 unità, e la sua direzione forma un angolo di 36° + 85° = **+121°** con l'asse X.

b) Per trovare la differenza fra i due vettori **D** = **A** – **B**, procediamo come illustrato nella **Fig. 4**.

Esercizio 1
Vettore differenza

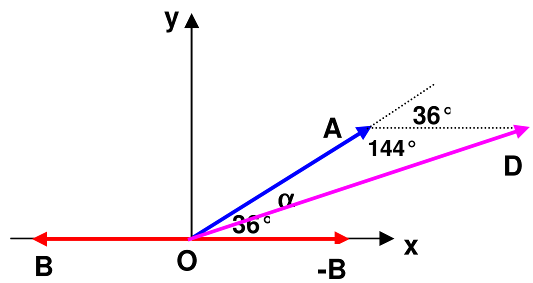

Fig. 4

Il modulo di **D** è dato da:

$d = (d_1^2 + d_2^2 - 2 \cdot d_1 \cdot d_2 \cdot \cos\theta)^{½} = D = (6^2 + 7^2 - 2 \cdot 6 \cdot 7 \cdot \cos 144°)^{½}$ = **12.31** unità;

mentre la direzione di **D** è data da:

$$\frac{D}{\sin 144°} = \frac{B}{\sin\boldsymbol{\alpha}}; \text{ quindi: } \quad \sin\boldsymbol{\alpha} = \frac{B \cdot \sin\theta}{D} = \frac{B \cdot \sin 144°}{D} = \mathbf{0.334}; \quad \boldsymbol{\alpha} \cong \mathbf{19.5°}$$

Dunque **D** ha una lunghezza di 12.31 unità e forma un angolo di 36° – 19.5° = 16.5° con l'asse X.

Componenti di un vettore

Tutti i vettori che, quando sono sommati, danno per somma un vettore **V** sono chiamati **vettori componenti** di **V**.
Quelli più frequentemente usati sono detti **componenti ortogonali**; ciò significa che il vettore è espresso come la somma di due vettori mutuamente perpendicolari. Allora, come si può vedere dalla **Fig. 5**, $\mathbf{V} = \mathbf{V}_x + \mathbf{V}_y$, con $V_x = V \cdot \cos\alpha$ e $V_y = V \cdot \text{sen}\alpha$. Definiti i versori $\mathbf{u}_x$ e $\mathbf{u}_y$ nelle direzioni degli assi X e Y, osserviamo che: $\mathbf{V}_x = \mathbf{OA} = \mathbf{u}_x \cdot V_x$ e $\mathbf{V}_y = \mathbf{OB} = \mathbf{u}_y \cdot V_y$. Pertanto si ha:
$\mathbf{V} = \mathbf{u}_x \cdot V_x + \mathbf{u}_y \cdot V_y$. Questa equazione esprime un vettore in funzione delle sue componenti ortogonali in due direzioni.

Componenti di un vettore

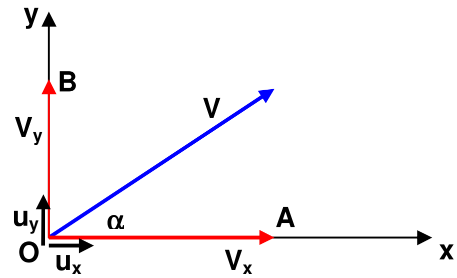

Fig. 5

Nello **spazio** esistono <u>tre componenti ortogonali</u> di un vettore **V**: $\mathbf{V}_x$, $\mathbf{V}_y$, $\mathbf{V}_z$. Si verifica facilmente con il calcolo che: $V^2 = V_x^2 + V_y^2 + V_z^2$. Definiti tre versori $\mathbf{u}_x$, $\mathbf{u}_y$, $\mathbf{u}_z$ paralleli rispettivamente agli assi X, Y, Z, si ha:

$$\mathbf{V} = \mathbf{u}_x \cdot V_x + \mathbf{u}_y \cdot V_y + \mathbf{u}_z \cdot V_z \, .$$

Un caso importante di vettore tri-dimensionale è il vettore posizione **r** = **OP**, che definisce un punto di coordinate (*x, y, z*).

Vettore posizione

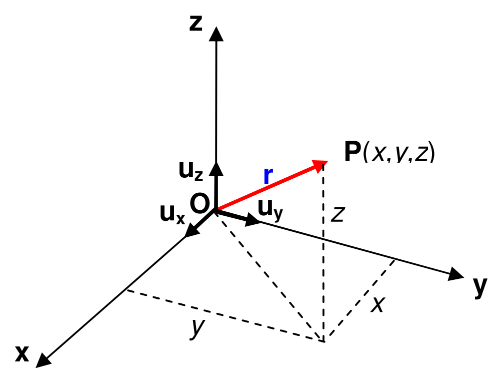

Fig. 6

Dalla **Fig. 6** si vede che: $\mathbf{r} = \mathbf{OP} = \mathbf{u}_x \cdot x + \mathbf{u}_y \cdot y + \mathbf{u}_z \cdot z$.

Il **vettore posizione** relativo a due punti P_1 e P_2 è $\mathbf{r}_{21} = \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$. Dalla **Fig. 7** si osserva che:

Vettore posizione relativo a due punti

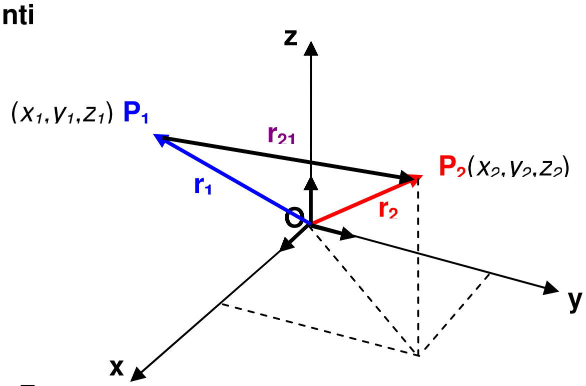

Fig. 7

$\mathbf{OP_2} = \mathbf{OP_1} + \mathbf{P_1P_2}$, cosicché: $\mathbf{r_{21}} = \mathbf{P_1P_2} = \mathbf{OP_2} - \mathbf{OP_1} = \mathbf{r_2} - \mathbf{r_1} =$
$= \mathbf{u}_x \cdot (x_2 - x_1) + \mathbf{u}_y \cdot (y_2 - y_1) + \mathbf{u}_z \cdot (z_2 - z_1)$.

Esercizio 2.

Trovare la **distanza** fra i due punti di coordinate (6, 8, 10) e (–4, 4, 10).

Tracciamo un sistema di assi ortogonali, sul quale identifichiamo i due punti. Osserviamo che entrambi i punti giacciono su un piano **parallelo** al piano XY, poiché entrambi si trovano a una distanza (altezza) di 10 unità nella direzione Z. Il vettore $\mathbf{r_{21}}$ è:

$\mathbf{r_{21}} = \mathbf{u}_x \cdot (x_2 - x_1) + \mathbf{u}_y \cdot (y_2 - y_1) + \mathbf{u}_z \cdot (z_2 - z_1) = \mathbf{u}_x \cdot (4 - 6) + \mathbf{u}_y \cdot (4 - 8) + \mathbf{u}_z \cdot (10 - 10) =$

$= \mathbf{u}_x \cdot (-2) + \mathbf{u}_y \cdot (-4) + \mathbf{u}_z \cdot (0) = -\mathbf{u}_x \cdot (2) - \mathbf{u}_y \cdot (4)$

Il **quadrato del modulo** di $\mathbf{r_{21}}$ è uguale alla somma dei quadrati di ciascuna componente:

$r_{21}^2 = 4 + 16 + 0 = 20$; quindi il modulo di $\mathbf{r_{21}}$ vale: $r_{21} = 4.47$ unità.

Esercizio 3.

Trovare le **componenti** di del vettore la cui lunghezza è 13 unità, e che forma un angolo θ di 22.6° con l'asse Z, e la cui proiezione sul piano XY forma un angolo ϕ di 37° con l'asse X.

Direzione nello spazio:
sono necessari due angoli

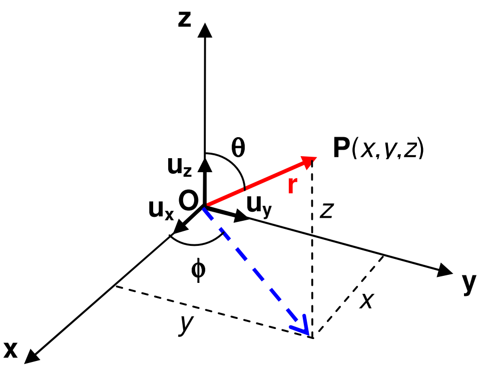

Fig. 8

Dunque: r = 13 unità; $\theta = 22.6°$; $\cos\theta = 0.923$.

Per trovare la componente z di $\mathbf{r}$ si deve applicare l'equazione: $r_z = r \cdot \cos\theta = 13 \cdot 0.923 = 12$ unità.

La **proiezione** di $\mathbf{r}$ sul piano XY è: $r_{xy} = r \cdot \mathrm{sen}\theta = 13 \cdot 0.384$.

Infine, le **proiezioni** di questo vettore sugli assi X e Y sono:

$r_x = r_{xy} \cdot \cos\phi = 13 \cdot 0.384 \cdot 0.800 = 4.0$ unità

$r_y = r_{xy} \cdot \mathrm{sen}\phi = 13 \cdot 0.384 \cdot 0.600 = 3.0$ unità.

Quindi il vettore che stiamo cercando si può scrivere nel seguente modo:

$\mathbf{r} = \mathbf{u}_x \cdot 4 + \mathbf{u}_y \cdot 3 + \mathbf{u}_z \cdot 12.$

Somma di più vettori

Per sommare più vettori $\mathbf{r_1}$, $\mathbf{r_2}$, $\mathbf{r_3}$, …, estendiamo il procedimento indicato per il caso di due vettori. Si disegna un vettore dopo l'altro, e il vettore somma risulta rappresentato dalla linea che va dall'origine del primo vettore alla punta dell'ultimo. Allora:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r_1} + \mathbf{r_2} + \mathbf{r_3} + \dots .$$

Consideriamo, per semplicità, il caso in cui tutti i vettori siano complanari; in tal caso ci bastano solamente due componenti. Allora:

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= (\mathbf{u}_x \cdot r_{1x} + \mathbf{u}_y \cdot r_{1y}) + (\mathbf{u}_x \cdot r_{2x} + \mathbf{u}_y \cdot r_{2y}) + (\mathbf{u}_x \cdot r_{3x} + \mathbf{u}_y \cdot r_{3y}) + \dots \\ &= \mathbf{u}_x \cdot (r_{1x} + r_{2x} + r_{3x} + \dots) + \mathbf{u}_y \cdot (r_{1y} + r_{2y} + r_{3y} + \dots) \\ &= \mathbf{u}_x \cdot r_x + \mathbf{u}_y \cdot r_y\end{aligned}$$

Pertanto : $r_x = r_{1x} + r_{2x} + r_{3x} + \dots = \sum_i r_{ix}$

$r_y = r_{1y} + r_{2y} + r_{3y} + \dots = \sum_i r_{iy}$

ove : r_{ix} e r_{iy} sono le componenti di r_i nella direzione, rispettivamente, dell'asse X e dell'asse Y (una volta note le componenti si può calcolare il vettore).

Esercizio 4.

Trovare il vettore risultante della somma dei seguenti cinque vettori:

$\mathbf{r_1} = \mathbf{u}_x \cdot (4) + \mathbf{u}_y \cdot (-3)$ unità.
$\mathbf{r_2} = \mathbf{u}_x \cdot (-3) + \mathbf{u}_y \cdot (2)$ unità.
$\mathbf{r_3} = \mathbf{u}_x \cdot (2) + \mathbf{u}_y \cdot (-6)$ unità.
$\mathbf{r_4} = \mathbf{u}_x \cdot (7) + \mathbf{u}_y \cdot (-8)$ unità.
$\mathbf{r_5} = \mathbf{u}_x \cdot (9) + \mathbf{u}_y \cdot (1)$ unità.

Applicando quanto visto precedentemente:

$r_x = r_{1x} + r_{2x} + r_{3x} + r_{4x} + r_{5x} = 4 - 3 + 2 + 7 + 9 = \mathbf{19}$ unità

$r_y = r_{1y} + r_{2y} + r_{3y} + r_{4y} + r_{5y} = -3 + 2 - 6 - 8 + 1 = \mathbf{-14}$ unità

Quindi : $\mathbf{r} = \mathbf{u}_x \cdot (19) - \mathbf{u}_y \cdot (14)$ unità.

Il modulo di $\mathbf{r}$ è: $r = [19^2 + (-14)^2]^{½} = \mathbf{23.55}$ unità.

La sua direzione è definita da: $\tan\alpha = r_y / r_x = \mathbf{-0.738}$ ovvero: $\alpha = \mathbf{-36.4°}$. Questo è l'angolo che il vettore $\mathbf{r}$ forma con l'asse X.

Applicazione a problemi cinematici

Per illustrare il modo di servirsi dei vettori in alcuni problemi fisici, consideriamo alcuni problemi cinematici. L'unica nozione fisica che si presuppone, è che si sappia che la **velocità** è una grandezza vettoriale.
Supponiamo, per esempio, che una barca si muova rispetto all'acqua con velocità $\mathbf{V}_B$. Se l'acqua è ferma, $\mathbf{V}_B$ è pure la velocità della barca misurata da un osservatore che si trovi sulla riva. Ma se l'acqua scorre con una certa velocità, si introduce un fattore di spostamento, che modifica la velocità della barca. Ne consegue che la velocità risultante della barca, misurata dall'osservatore sulla riva, è il vettore somma della velocità $\mathbf{V}_B$ della barca rispetto all'acqua, e della velocità di spostamento $\mathbf{V}_c$ dovuta all'acqua corrente. Cioè si ha: $\mathbf{V} = \mathbf{V}_B + \mathbf{V}_c$.

Esercizio 5.

Un motoscafo si muove in direzione nord alla velocità di 15 kmh^{-1} in una zona in cui la corrente ha velocità di 5 kmh^{-1} in direzione S-70°-E. Trovare la velocità **risultante** della barca.

Esercizio 5
Velocità risultante del motoscafo

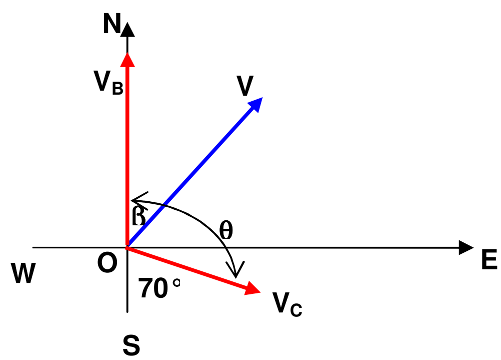

Fig. 9

La velocità risultante è data da: $\mathbf{V} = \mathbf{V}_B + \mathbf{V}_c$.
Analiticamente, poiché $\theta = 110°$, abbiamo:

$V = (15^2 + 5^2 + 2 \cdot 15 \cdot 5 \cdot \cos 110°)^{½} = \mathbf{14.1}$ kmh^{-1} , che dà il valore della velocità risultante. Per ottenere la direzione, applichiamo la seguente equazione:

$$\frac{V}{\sin\theta} = \frac{V_C}{\sin\boldsymbol{\beta}} \quad ; \qquad \sin\boldsymbol{\beta} = \frac{V_C \cdot \sin\theta}{V} = \mathbf{0.332} \quad \text{, quindi: } \boldsymbol{\beta} = \mathbf{19.4°}$$

Il moto risultante è quindi nella direzione N 19.4°E.

Esercizio 6.

Un motoscafo da corsa si muove in direzione N 30°E alla velocità di 25 kmh^{-1} in un luogo in cui la corrente è tale che il **moto risultante** avviene nella direzione N 50°E alla velocità di 30 kmh^{-1}. Trovare la velocità della **corrente**.

La velocità risultante è data da: $\mathbf{V} = \mathbf{V}_B + \mathbf{V}_c$.
Questo significa che la velocità della **corrente** è data dalla: $\mathbf{V}_c = \mathbf{V} - \mathbf{V}_B$

Esercizio 6
Velocità della corrente

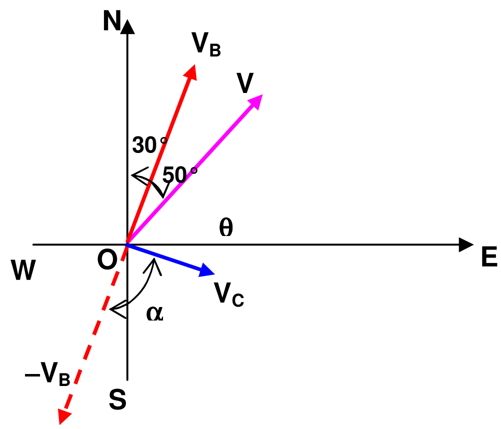

Fig. 10

Per calcolare la velocità della corrente $\mathbf{V}_c$, osserviamo che l'angolo compreso fra **V** e $-\mathbf{V}_B$ è di 160°. Pertanto:

$V_C = (30^2 + 25^2 + 2 \cdot 30 \cdot 25 \cdot \cos 160°)^{½} = \mathbf{10.8}$ kmh^{-1} .

Per ottenere la direzione di $\mathbf{V}_c$, ricaviamo dapprima l'angolo $\boldsymbol{\alpha}$ fra **V** e $-\mathbf{V}_B$, usando la seguente equazione:

$$\frac{V}{\sin\boldsymbol{\alpha}} = \frac{V_C}{\sin\mathbf{160}°} \quad ; \qquad \sin\boldsymbol{\alpha} = \frac{V \cdot \sin 160°}{V_C} = \mathbf{0.951}, \quad \text{quindi: } \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{72}° \ .$$

Dunque, l'angolo formato con **l'asse SN** è di 72° – 30° = 42° e la direzione di $\mathbf{V}_c$ è S 42°E.

Prodotto scalare

Oltre alla somma, è possibile definire altre operazioni fra vettori. Una di queste operazioni è il prodotto scalare. Un'altra è il prodotto vettoriale.
Il **prodotto scalare** (o prodotto “interno”) di due vettori **A** e **B**, rappresentato dal simbolo **A·B** (si legge “A punto B”), è definito come la quantità scalare ottenuta facendo il prodotto dei moduli di **A** e di **B** per il coseno dell'angolo **θ** compreso fra i due vettori:

$$\mathbf{A \cdot B} = A \cdot B \cdot \cos\boldsymbol{\theta} \ .$$

Il prodotto scalare **A·B** si può anche ricavare facendo il prodotto del modulo del vettore **B** per la componente del vettore **A** nella direzione di **B** o, inversamente, il prodotto del modulo del vettore **A** per la componente del vettore **B** nella direzione di **A**. Ovviamente $\mathbf{A \cdot A} = A^2$, dato che in questo caso l'angolo è zero. Se i due vettori sono perpendicolari, il loro prodotto scalare è zero. La condizione di perpendicolarità è pertanto espressa dalla relazione **A·B** = 0. Per definizione, il prodotto scalare è **commutativo**, cioè **A·B** = **B·A** , in quanto cos**θ** ha lo stesso valore in entrambi i casi. Il prodotto scalare gode della proprietà distributiva rispetto alla somma; si ha cioè:

$$\mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{C} \cdot \mathbf{B}$$

I prodotti scalari fra i versori sono:

$$\mathbf{u}_x \cdot \mathbf{u}_x = \mathbf{u}_y \cdot \mathbf{u}_y = \mathbf{u}_z \cdot \mathbf{u}_z = 1 \quad ; \qquad \mathbf{u}_x \cdot \mathbf{u}_y = \mathbf{u}_y \cdot \mathbf{u}_z = \mathbf{u}_z \cdot \mathbf{u}_x = 0$$

Scrivendo **A** e **B** in funzione delle loro **componenti ortogonali**, e applicando la proprietà distributiva, otteniamo:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = (\mathbf{u}_x \cdot A_x + \mathbf{u}_y \cdot A_y + \mathbf{u}_z \cdot A_z)\cdot(\mathbf{u}_x \cdot B_x + \mathbf{u}_y \cdot B_y + \mathbf{u}_z \cdot B_z) =$$
$$= (\mathbf{u}_x \cdot \mathbf{u}_x) A_xB_x + (\mathbf{u}_x \cdot \mathbf{u}_y) A_xB_y + (\mathbf{u}_x \cdot \mathbf{u}_z) A_xB_z +$$
$$+ (\mathbf{u}_y \cdot \mathbf{u}_x) A_yB_x + (\mathbf{u}_y \cdot \mathbf{u}_y) A_yB_y + (\mathbf{u}_y \cdot \mathbf{u}_z) A_yB_z +$$
$$+ (\mathbf{u}_z \cdot \mathbf{u}_x) A_zB_x + (\mathbf{u}_z \cdot \mathbf{u}_y) A_zB_y + (\mathbf{u}_z \cdot \mathbf{u}_z) A_zB_z .$$

Infine: $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$.

Questo risultato ha molte applicazioni. Osserviamo che: $A^2 = \mathbf{A}\cdot\mathbf{A} = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2$.

Esercizio 7.

Trovare l'angolo compreso fra i vettori:

$\mathbf{A} = 2\,\mathbf{u}_x + 3\,\mathbf{u}_y - \mathbf{u}_z$
$\mathbf{B} = -\,\mathbf{u}_x + \mathbf{u}_y + 2\,\mathbf{u}_z$

Calcoliamo dapprima il **prodotto scalare** di **A** e **B**:

$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = 2(-1) + 3(1) + (-1)2 = -1.$

Si ha anche:

$A = (4 + 9 + 1)^{½} = 3.74$ unità

$B = (1 + 1 + 4)^{½} = 2.45$ unità

Dalla equazione: $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = A\cdot B\cdot\cos\boldsymbol{\theta}$, si ha: $\cos\boldsymbol{\theta} = \dfrac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{AB} = -\dfrac{1}{9.17} = -0.109$,

corrispondente a $\boldsymbol{\theta} = 96.3°$.

Prodotto vettoriale

Il **prodotto vettoriale** (o prodotto "esterno") di due vettori **A** e **B**, rappresentato dal simbolo **AxB** (si legge "A vettor B"), è definito come il vettore il cui **modulo** è dato da:

$$|\mathbf{AxB}| = AB\sin\boldsymbol{\theta}$$

dove $\boldsymbol{\theta}$ è l'angolo (minore di 180°) compreso fra **A** e **B**. Il vettore è **perpendicolare** al piano individuato da **A** e da **B** e ha la direzione del pollice, se il palmo della mano destra compie la rotazione illustrata in **Fig. 11** (dita orientate nella direzione di rotazione da **A** verso **B**). Il **modulo** del prodotto vettoriale **AxB** si può anche trovare facendo il prodotto del modulo del vettore **B** per la componente del vettore **A** perpendicolare a **B** o, inversamente, facendo il prodotto del modulo del vettore **A** per la componente del vettore **B** perpendicolare a **A**.
Dalla definizione di prodotto vettoriale, si può concludere che: **AxB** = – **BxA**
per cui il prodotto vettoriale è **anticommutativo**.

Direzione e verso del prodotto vettoriale

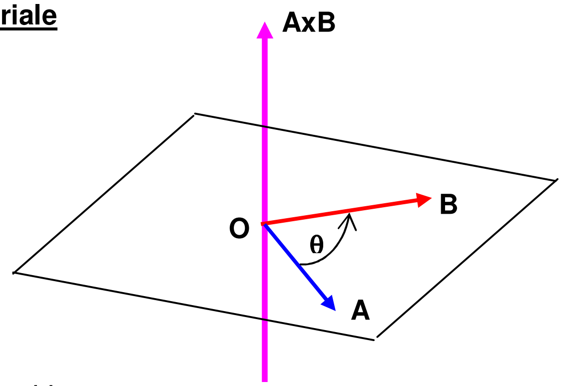

Fig. 11

Se i due vettori sono **paralleli**, $\theta = 0°$, allora sen$\theta = 0$, e il prodotto vettoriale è uguale a **zero**.
Il **prodotto vettoriale** gode della proprietà **distributiva** rispetto alla somma:

$$\mathbf{C \times (A + B) = C \times A + C \times B}$$

I prodotti vettoriali fra i tre versori $\mathbf{u}_x$, $\mathbf{u}_y$, $\mathbf{u}_z$ sono:

$\mathbf{u}_x \times \mathbf{u}_x = \mathbf{u}_y \times \mathbf{u}_y = \mathbf{u}_z \times \mathbf{u}_z = 0$

$\mathbf{u}_x \times \mathbf{u}_y = -\, \mathbf{u}_y \times \mathbf{u}_x = \mathbf{u}_z$

$\mathbf{u}_y \times \mathbf{u}_z = -\, \mathbf{u}_z \times \mathbf{u}_y = \mathbf{u}_x$

$\mathbf{u}_z \times \mathbf{u}_x = -\, \mathbf{u}_x \times \mathbf{u}_z = \mathbf{u}_y$

Scrivendo **A** e **B** in funzione delle loro **componenti ortogonali** e applicando la proprietà distributiva, si ha :

$$\begin{aligned}\mathbf{A \times B} &= (\mathbf{u}_x \cdot A_x + \mathbf{u}_y \cdot A_y + \mathbf{u}_z \cdot A_z)\ \mathbf{x}\ (\mathbf{u}_x \cdot B_x + \mathbf{u}_y \cdot B_y + \mathbf{u}_z \cdot B_z) = \\ &= (\mathbf{u}_x \times \mathbf{u}_x)\, A_xB_x + (\mathbf{u}_x \times \mathbf{u}_y)\, A_xB_y + (\mathbf{u}_x \times \mathbf{u}_z)\, A_xB_z + \\ &+ (\mathbf{u}_y \times \mathbf{u}_x)\, A_yB_x + (\mathbf{u}_y \times \mathbf{u}_y)\, A_yB_y + (\mathbf{u}_y \times \mathbf{u}_z)\, A_yB_z + \\ &+ (\mathbf{u}_z \times \mathbf{u}_x)\, A_zB_x + (\mathbf{u}_z \times \mathbf{u}_y)\, A_zB_y + (\mathbf{u}_z \times \mathbf{u}_z)\, A_zB_z\ .\end{aligned}$$

Da cui:

$$\mathbf{A \times B} = \mathbf{u}_x \cdot (A_yB_z - A_zB_y) + \mathbf{u}_y \cdot (A_zB_x - A_xB_z) + \mathbf{u}_z \cdot (A_xB_y - A_yB_x)$$

Che si può scrivere, in forma sintetica, sotto forma di determinante:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{u_x} & \mathbf{u_y} & \mathbf{u_z} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

Nota sui determinanti. Un determinante è una notazione conveniente per rappresentare delle quantità che si debbano combinare in un dato modo simmetrico. Un determinante del secondo ordine è un gruppo di quattro quantità disposte su due righe e due colonne, per le quali vale la seguente regola di calcolo:	$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$

Esercizio 8.

Trovare il **prodotto vettoriale** dei vettori:

$\mathbf{A} = 2\,\mathbf{u}_x + 3\,\mathbf{u}_y - \mathbf{u}_z$
$\mathbf{B} = -\,\mathbf{u}_x + \mathbf{u}_y + 2\,\mathbf{u}_z$

Utilizzando la relazione:

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{u_x} & \mathbf{u_y} & \mathbf{u_z} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{u_x} & \mathbf{u_y} & \mathbf{u_z} \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 7\,\mathbf{u}_x - 3\,\mathbf{u}_y + 5\,\mathbf{u}_z = \quad 7\,\mathbf{i} - 3\,\mathbf{j} + 5\,\mathbf{k}$$

Esercizio 9.

Il **vettore posizione** di una particella sia inizialmente:

$\mathbf{r_1} = (-3\text{m})\,\mathbf{i} + (2\text{m})\,\mathbf{j} + (5\text{m})\,\mathbf{k}$

dopo un certo tempo t esso diventa:

$\mathbf{r_2} = (9\text{m})\,\mathbf{i} + (2\text{m})\,\mathbf{j} + (8\text{m})\,\mathbf{k}$

Qual è lo spostamento $\Delta\mathbf{r}$ da $\mathbf{r_1}$ a $\mathbf{r_2}$?

Si ottiene lo spostamento $\Delta\mathbf{r}$ sottraendo il vettore posizione iniziale $\mathbf{r_1}$ al vettore posizione finale $\mathbf{r_2}$.

$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r_2} - \mathbf{r_1} = \Delta x\,\mathbf{i} + \Delta y\,\mathbf{j} + \Delta z\,\mathbf{k}$
$\qquad\qquad = (12\text{m})\,\mathbf{i} + (0\text{m})\,\mathbf{j} + (3\text{m})\,\mathbf{k}$

Velocità vettoriale media e istantanea

Se una particella subisce uno spostamento $\Delta\mathbf{r}$ in un intervallo di tempo Δt, la sua velocità vettoriale media $\bar{\mathbf{v}}$ è:

$$\text{velocità vettoriale media} = \frac{\text{vettore spostamento}}{\text{intervallo di tempo}}$$

ossia:

$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}$$

Si deduce immediatamente che la direzione di $\bar{\mathbf{v}}$ deve essere la stessa dello spostamento $\Delta\mathbf{r}$.
Scrivendo questa equazione in termini di componenti vettoriali:

$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{\Delta x\,\mathbf{i} + \Delta y\,\mathbf{j} + \Delta z\,\mathbf{k}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\mathbf{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\mathbf{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t}\mathbf{k}$$

Per esempio, se la particella dell'**Esercizio 9** si sposta dalla posizione iniziale alla posizione finale in 2,0 secondi, la sua velocità vettoriale media in questo intervallo è data da:

$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{(12\text{m})\,\mathbf{i} + (3\text{m})\,\mathbf{k}}{2{,}0\ \text{s}} = (6{,}0\ \text{m/s})\,\mathbf{i} + (1{,}5\ \text{m/s})\,\mathbf{k}$$

Questo significa che la velocità vettoriale media ha una componente di 6,0 m/s lungo l'asse x e una componente di 1,5 m/s lungo l'asse z (e nulla lungo l'asse y).
Quando si parla di velocità solitamente si intende velocità istantanea **v** in un dato istante. Questa **v** è il valore limite cui tende $\bar{\mathbf{v}}$ al tendere a zero dell'intervallo di tempo centrato su quell'istante. Matematicamente si può rappresentare **v** come una **derivata**:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

Velocità istantanea

Particella che si muove nel piano xy.

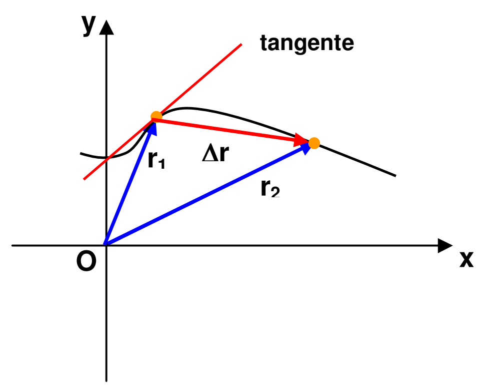

Fig. 12

Per trovare la velocità istantanea della particella all'istante, per esempio, t_1, quando la particella si trova nella posizione 1, stringiamo l'intervallo di tempo attorno a t_1. Mentre l'intervallo Δt si riduce a zero, si hanno tre effetti: 1) il vettore $\mathbf{r_2}$ si avvicina a $\mathbf{r_1}$ e quindi $\Delta\mathbf{r}$ si riduce a zero; 2) la direzione di $\Delta\mathbf{r}/\Delta t$ (e così la direzione di $\bar{\mathbf{v}}$) si avvicina alla direzione della retta tangente al percorso della particella nella posizione 1; 3) la velocità media $\bar{\mathbf{v}}$ si approssima alla velocità istantanea **v** all'istante t_1. Al limite, quando $\Delta t \to 0$, $\bar{\mathbf{v}} \to \mathbf{v}$ e, cosa importante, $\bar{\mathbf{v}}$ assume la direzione della tangente, così anche **v** ha la stessa direzione di quest'ultima.

La velocità istantanea di una particella ha sempre la direzione della tangente alla curva che rappresenta il percorso della particella.

Lo stesso accade se si considerano tre dimensioni: **v** è sempre tangente alla traiettoria della particella.
Utilizzando i versori:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k} = v_x\,\mathbf{i} + v_y\,\mathbf{j} + v_z\,\mathbf{k}$$

In cui le componenti scalari della velocità sono:

$$v_x = \frac{dx}{dt};\quad v_y = \frac{dy}{dt};\quad v_z = \frac{dz}{dt}.$$

Velocità istantanea e componenti

Vettore velocità **v** e le sue componenti scalari su x e y.

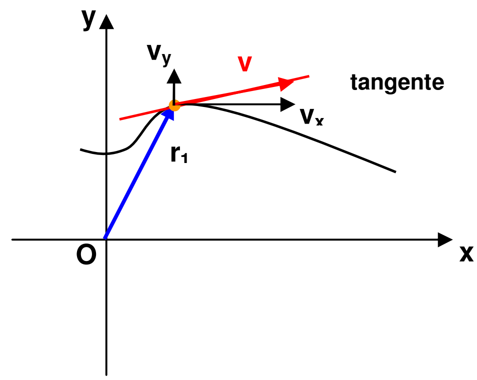

Fig. 13

Si osservi in **Fig. 13** che il vettore velocità **v** è tangente al percorso della particella nella posizione in cui si trova.
N.B. la **lunghezza** del vettore velocità rappresenta il **modulo** della velocità (e si può tracciare con una scala qualunque).

Esercizio 10.

Un uomo lascia la sua casa e vi rientra nove ore dopo. Quale è la sua velocità media?

$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{0}{9\,h} = 0$$

La velocità media è **nulla** perché è nullo lo spostamento totale, in quanto l'uomo ritorna casa sua.