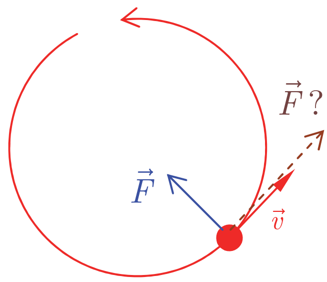
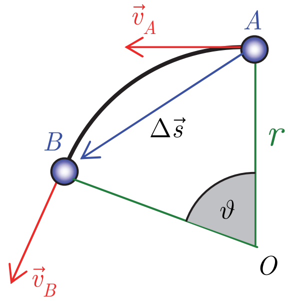
così l'oggetto, in base a quanto previsto dalla seconda legge della dinamica, in quanto sottoposto a forza nulla dovrebbe procedere in linea retta e non lungo una circonferenza!

### *E' necessaria una forza anche lungo la direzione istantanea della velocità?*

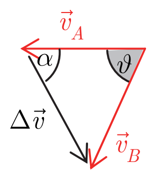



Immaginiamo la pallina di una roulette lanciata dal croupier. Inizialmente la pallina stava ferma, quindi la mano del croupier ha dovuto esercitare una forza per portarla fino ad avere velocità $\vec{v}$. Come sappiamo dalla seconda legge della dinamica, da quel momento in poi, in assenza di qualsiasi attrito, non è più necessaria una forza *nella direzione istantanea* di $\vec{v}$ per mantenere la sua intensità $|\vec{v}|$ costante. D'altro canto non possiamo nemmeno escludere che una tale forza ci sia: ad esempio quando un'auto percorre una curva, può farlo con velocità di modulo costante, ma anche accelerando in intensità. Allo stesso modo, quando tentiamo di produrre con la mano il moto circolare in un peso agganciato ad una corda, dobbiamo prima metterlo in moto, esercitando una forza nella direzione della velocità. Poi compiamo due azioni: mantenendo ferma la mano tiriamo la corda in modo da costringere il peso a descrivere la circonferenza, e ogni tanto dovremo pure dare un colpetto nella direzione della velocità per compensare l'azione degli attriti e della gravità, che tendono a far diminuire l'intensità della velocità da noi inizialmente impressa. Nel seguito ci occuperemo della cinematica del moto circolare in cui l'intensità della velocità rimane costante, che chiameremo *moto circolare uniforme*. Nel moto circolare uniforme, a essere costante è dunque solo $|\vec{v}|$, mentre $\vec{v}$ cambia ogni istante direzione.

### *Come possiamo ricavare l'accelerazione lungo la direzione radiale?*



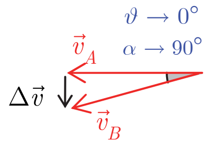

Preso un punto in moto circolare uniforme di raggio $r$, consideriamo un arco di circonferenza AB, e l'intervallo di tempo $\Delta t$ che occorre al punto per percorrerlo. In questo stesso tempo il raggio della circonferenza avrà "spazzato" l'angolo $\vartheta$ e la velocità avrà cambiato direzione passando da $\vec{v}_A$ a $\vec{v}_B$. Poiché sia $\vec{v}_A$ che $\vec{v}_B$ sono perpendicolari al raggio, se li riportiamo con un'origine comune, è immediato concludere che anche la velocità ha spazzato lo stesso angolo $\vartheta$. Dal metodo di punta-coda per la somma dei vettori si riconosce subito che il vettore $\Delta\vec{v}$ che unisce le punte di $\vec{v}_A$ e $\vec{v}_B$ è il vettore differenza, cioè si ha $\vec{v}_A + \Delta\vec{v} = \vec{v}_B$, da cui $\Delta\vec{v} = \vec{v}_B - \vec{v}_A$. Consideriamo ora il triangolo delle velocità e il triangolo AOB: sono entrambi isosceli e con un angolo uguale, pertanto sono simili:




$$\frac{|\Delta\vec{v}|}{|\vec{v}|} = \frac{|\Delta\vec{s}|}{r}$$

Dividiamo per $\Delta t$ ambo i membri e riordiniamo:

$$\frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t} = \frac{|\vec{v}|}{r} \cdot \frac{|\Delta\vec{s}|}{\Delta t}$$

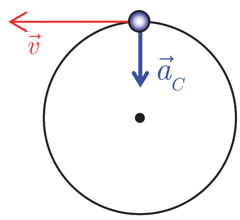



Quando l'intervallo $\Delta t$ tende a zero, sappiamo che il rapporto $|\Delta\vec{s}|/\Delta t$ diviene il modulo della velocità istantanea $|\vec{v}|$, mentre il rapporto $|\Delta\vec{v}|/\Delta t$, che rappresenta il modulo dell'accelerazione media, diventa il modulo dell'accelerazione istantanea.

**Esercizi**

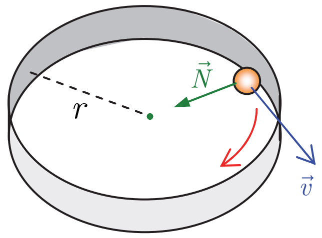
**1.** La velocità di una particella in moto circolare uniforme, subisce nell'intervallo $\Delta t = 0.0010\ \mathrm{s}$ una variazione tale che il modulo del vettore $\Delta\vec{v}$ risulta $|\Delta\vec{v}| = 0.010\ \mathrm{m/s}$. Calcolare l'accelerazione media.

Risulta: $|\Delta\vec{v}|/\Delta t = (0.010/0.0010)\ \mathrm{m/s^2} = 10\ \mathrm{m/s^2}$.




La direzione dell'accelerazione istantanea si mantiene sempre parallela a $\Delta\vec{v}$ e così alla fine risulta perpendicolare a $\vec{v}$. Infatti, nel triangolo delle velocità, quando $\vartheta \to 0$ si ha $\alpha \to 90°$, dovendo la somma rimanere uguale a $180°$. La chiamiamo quindi *accelerazione centripeta* $\vec{a}_C$, in quanto diretta lungo il raggio puntando verso il centro. Sostituendo nella relazione precedente $|\Delta\vec{v}|/\Delta t$ con $|\vec{a}_C|$ e $|\Delta\vec{s}|/\Delta t$ con $|\vec{v}|$ si trova che l'intensità dell'accelerazione centripeta vale:

$$\boxed{|\vec{a}_C| = \frac{|\vec{v}|^2}{r}}$$

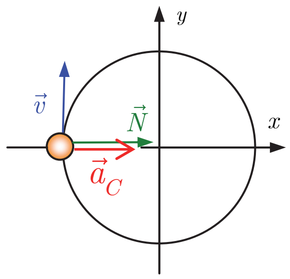



**Esercizi**

**2.** In un piano orizzontale, una pallina di massa $m = 0.0500$ kg è lanciata in una guida circolare di raggio $r = 0.200$ m e percorre un giro in $1.45$ s. Assumendo che il modulo della velocità sia rimasto costante durante il giro, calcolare l'accelerazione centripeta della pallina e la forza normale esercitata su di lei dalla guida.

Troviamo innanzitutto il modulo della velocità:

$$|\vec{v}| = \frac{2\pi r}{1.45\,\text{s}} = \frac{6.28\times 0.200}{1.45}\ \text{m/s} = 0.866\,\text{m/s}$$




Fissiamo un riferimento sul piano con l'origine nel centro della circonferenza e consideriamo l'istante in cui la pallina taglia l'asse delle ascisse come in figura. In direzione orizzontale agisce la forza normale, mentre l'accelerazione vale $\vec{a}(|\vec{v}|^2/r; 0)$:

$$N_x = ma_x \quad\Rightarrow\quad N_x = m\frac{|\vec{v}|^2}{r} = \left(0.0500\times\frac{0.866^2}{0.200}\right)\text{N} = 0.187\ \text{N}$$

e per l'accelerazione centripeta si ha:

$$|\vec{a}_C| = \frac{|\vec{v}|^2}{r} = \frac{0.866^2}{0.200}\ \text{m/s}^2 = 3.75\,\text{m/s}^2$$

### La Controfisica

A volte viene detta "forza centrifuga". la forza che fa coppia azione e reazione con la forza centripeta che agisce sull'oggetto. Va però osservato che una tale forza *non appartiene allo schema di corpo libero dell'oggetto che gira*, ma, se ad esempio abbiamo una massa che gira legata ad una corda, appartiene a quello della corda che la fa girare. Quindi non va confusa con le forze che agiscono sull'oggetto. Lo schema di corpo libero *della corda* contempla due azioni, quella appunto dovuta all'oggetto, ed il vincolo del perno centrale. Poiché ogni punto della corda si muove di moto circolare, la somma di entrambe fornisce la forza centripeta che agisce *sulla corda*. L'aggettivo "centrifugo" è però abusivo, infatti, chi ha detto che l'oggetto che la subisce si stia muovendo di moto circolare? Il centro della corda lo fa, ma pensiamo invece alle rotaie di un treno in curva, che esercitano su di esso una forza centripeta. La forza di reazione che il treno esercita sulle rotaie non può in nessun caso definirsi centrifuga perché le rotaie sono immobili. Centrifuga significa infatti "in fuga dal centro della traiettoria circolare". Se un corpo è immobile, di quale traiettoria circolare si parla? Di quella del treno? Ma la traiettoria di un oggetto non ha nulla a che vedere con la direzione delle forze cha agiscono su di un altro.

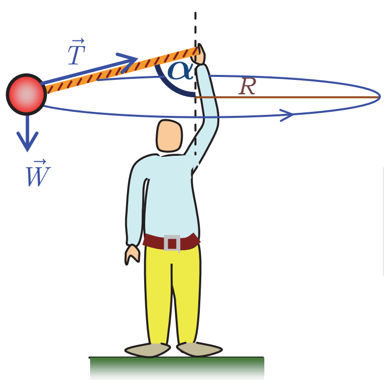
***Cosa s'intende con il termine "forza centripeta"?***

Se una particella di massa $m$ segue un moto circolare uniforme di raggio $r$, lungo la direzione radiale istantanea la seconda legge della dinamica si scrive:

$$\sum F_r = m\frac{|\vec{v}|^2}{r}$$

Si chiama *forza centripeta* la somma delle componenti in direzione radiale $\sum F_r$ di tutte le forze che agiscono su di una particella in moto circolare.

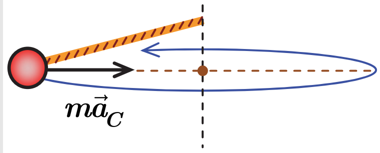
*Non si tratta quindi di un nuovo tipo di forza*, ma solo del nome che sinteticamente si assegna alla risultante delle forze che producono l'accelerazione centripeta. Nel precedente esempio la forza centripeta è fornita dalla normale alla guida, in questo caso l'unica ad agire sulla pallina in direzione radiale. Riflettiamo sul fatto che la forza normale è una forza passiva, che è in grado di fornire sempre il valore che occorre per costringere l'oggetto a percorrere la traiettoria circolare di quel raggio con quella velocità. Se ad esempio il modulo della velocità raddoppiasse, la guida dovrebbe fornire una forza centripeta $m(2|\vec{v}|)^2/r = 4m|\vec{v}|^2/r$ quattro volte più grande, e così via finché la forza richiesta non divenisse così intensa da piegare la guida stessa. E' quanto accade ai treni che deragliano per aver tentato di percorrere le curve a velocità superiore al massimo che il binario poteva sopportare senza deformarsi.




**Esercizi**

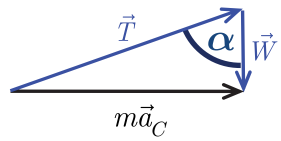
**3.** Una massa $m$, legata al capo di una fune, viene fatta ruotare da un uomo sopra alla sua testa. La massa descrive una circonferenza orizzontale di raggio $R = 1.30$ m e la corda forma sempre uno stesso angolo $\alpha$ con la verticale. Sapendo che la velocità costante di rotazione è $8.50\ \mathrm{m/s}$, calcolare $\alpha$.

La forza centripeta $m\vec{a}_C$ è orizzontale, diretta verso il centro della circonferenza (che si trova sulla retta verticale passante per la mano dell'uomo), ed è prodotta dalle due forze che agiscono sulla massa, cioè la tensione ed il peso, sommate vettorialmente, come si vede applicando la seconda legge in forma vettoriale:




$\vec{T} + \vec{W} = m\vec{a}_C$

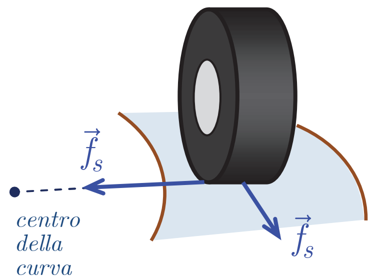
Dal metodo di punta coda risulta poi che i tre vettori $\vec{W}$ ed $m\vec{a}_C$ sono cateti di un triangolo rettangolo in cui $\vec{T}$ è ipotenusa. Come sappiamo, in un triangolo rettangolo il rapporto fra la misura $m\,|\vec{a}_C|$ del cateto opposto ad $\alpha$ e la misura $|\vec{W}|$ del cateto adiacente ad $\alpha$ fornisce la tangente goniometrica dell'angolo:




$$\tan\alpha = \frac{m\,|\vec{a}_C|}{|\vec{W}|} = \frac{m\,|\vec{v}\,|^2/R}{mg} = \frac{|\vec{v}\,|^2}{Rg} = \frac{8.50^2}{1.30\times 9.81} = 5.67$$

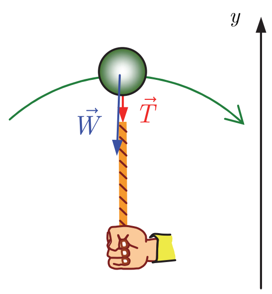
$$\alpha = \tan^{-1}(5.67) = 80.0°$$

Come si vede dall'esempio precedente, la forza centripeta può avere le origini più diverse: la tensione di una corda combinata vettorialmente al peso, produce la forza centripeta quando si fa ruotare una massa ad un suo capo. Analogamente, la forza di gravità funge da forza centripeta per tenere la Luna in orbita attorno alla Terra, e l'attrito statico fra pneumatici ed asfalto fornisce la forza centripeta che serve per far percorrere all'auto una curva. In quest'ultimo caso quindi, osservando il disegno a lato avremo che l'attrito statico agirà sulla ruota, oltre che nel verso di avanzamento, anche in direzione radiale, puntando verso il centro istantaneo della curva. È impossibile quindi far curvare un mezzo con pneumatici su di una superficie priva di attrito come quella di un lago ghiacciato.




**Esercizi**

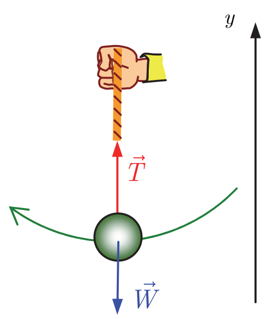
**4.** Una massa $m = 0.600\ \mathrm{kg}$ agganciata al capo di una fune lunga $0.500\ \mathrm{m}$ viene fatta ruotare in un piano verticale, imprimendogli nel punto più in basso una velocità $|\vec{v}| = 5.00\ \mathrm{m/s}$. La traiettoria è circolare ma il modulo della velocità non rimane costante in quanto la massa è rallentata dalla gravità mentre sale ed è accelerata mentre scende. Sapendo che nel punto più in alto risulta $|\vec{v}| = 2.32\ \mathrm{m/s}$, si calcolino la forza centripeta, l'accelerazione centripeta e la tensione della fune nelle posizioni di massima e minima altezza.




Nella posizione di minima altezza abbiamo, lungo l'asse $y$ (che in quel momento coincide con la direzione radiale):

$$T_y + W_y = ma_y \quad\Rightarrow\quad |\vec{T}| - mg = m\frac{|\vec{v}\,|^2}{r}$$

$$|\vec{T}| = mg + m\frac{|\vec{v}\,|^2}{r} = \left(0.600\times 9.81 + 0.600\times\frac{5.00^2}{0.500}\right)\ \mathrm{N} = 35.9\ \mathrm{N}$$




mentre la forza centripeta e l'accelerazione centripeta valgono:

$$\sum F_r = \left|\vec{T}\right| - mg = (35.9 - 0.600\times 9.81)\ \mathrm{N} = 30.0\ \mathrm{N}$$

$$|\vec{a}_C| = \frac{|\vec{v}\,|^2}{r} = \frac{5.00^2}{0.500}\ \mathrm{m/s^2} = 50.0\ \mathrm{m/s^2} \qquad \left(a_y = 50.0\ \mathrm{m/s^2}\right)$$

Nel punto di massima altezza abbiamo, sempre lungo la direzione radiale $y$:

$$T_y + W_y = ma_y \quad\Rightarrow\quad -|\vec{T}| - mg = -m\frac{|\vec{v}\,|^2}{r}$$

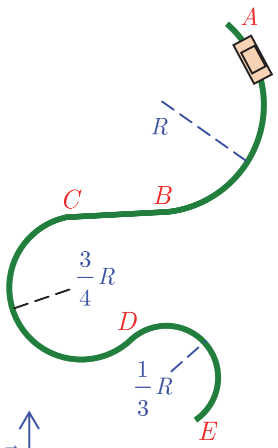
$$|\vec{T}| = m\frac{|\vec{v}|^2}{r} - mg = \left(0.600 \times \frac{2.32^2}{0.500} - 0.600 \times 9.81\right) \text{ N} = 0.573 \text{ N}$$

mentre la forza centripeta e l'accelerazione centripeta valgono:

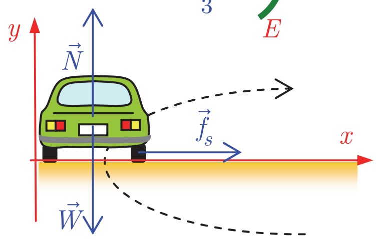
$$\sum F_r = -|\vec{T}| - mg = (-0.573 - 0.600 \times 9.81) \text{ N} = -6.46 \text{ N}$$

$$|\vec{a}_C| = \frac{|\vec{v}|^2}{r} = \frac{2.32^2}{0.500} \text{ m/s}^2 = 10.8 \text{ m/s}^2 \qquad \left(a_y = -10.8 \text{ m/s}^2\right)$$

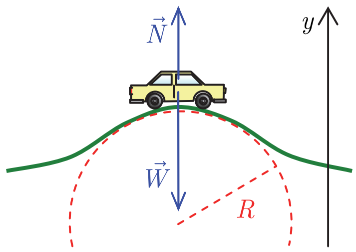
Riflettiamo sul fatto che la tensione della corda non coincide con la forza centripeta, ma anzi $|\vec{T}|$ aggiusta il suo valore facendosi minima quando è aiutata dalla gravità nel produrre la forza centripeta, come accade nel punto più alto, e facendosi invece massima quando è contrastata dalla gravità nel produrre la forza centripeta, come accade nel punto più basso.



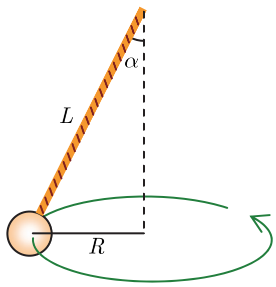

**5.** Un'auto segue una strada curva procedendo a velocità di modulo costante $|\vec{v}|$. Si calcoli il modulo della sua accelerazione nei tratti AB, BC, CD, DE specificando dove è massimo e dove minimo. [R]



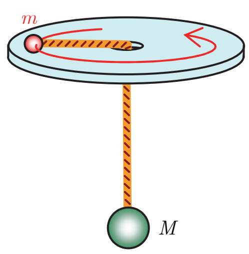

**6.** Un'automobile di massa $m = 1500$ kg percorre una curva circolare di raggio $r = 40.0$ m alla velocità di 15.0 m/s. Si calcoli la forza centripeta. Sapendo poi che il coefficiente di attrito statico fra pneumatici ed asfalto è $\mu_s = 0.950$, si calcoli la massima velocità alla quale l'auto può percorrere la curva e la forza centripeta in questo secondo caso. [R: $0.844 \times 10^4$ N, 19.3 m/s, $1.40 \times 10^4$ N]



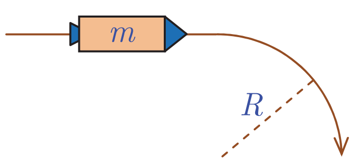

**7.** Un'automobile di $m = 1300$ kg, in viaggio a velocità costante di 10.5 m/s, passa su di un dosso il cui profilo è una circonferenza di raggio $R = 15.0$ m. Si dica, senza svolgere alcun calcolo, se quando l'auto raggiunge la sommità, la forza normale esercitata dal terreno è maggiore, minore od uguale al peso della vettura. Si calcolino quindi le intensità della forza centripeta e della forza normale in quel momento. [R: $9.56 \times 10^3$ N, $3.20 \times 10^3$ N]




**8.** Una pallina di massa $m = 0.300$ kg, appesa a un filo lungo $L = 0.750$ m, gira a velocità di modulo costante descrivendo una circonferenza, mentre l'angolo che il filo forma con la verticale rimane sempre $\alpha = 25.0°$. Si trovi la tensione del filo, l'intensità della forza centripeta e dell'accelerazione centripeta, ed il tempo che occorre alla pallina per completare un giro. [R: 3.25N, 1.37N, 4.57 m/s$^2$, 1.20 m/s, 1.66 s]

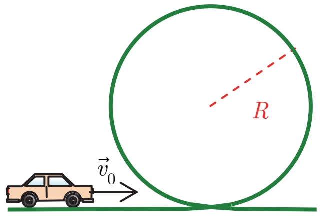



**9.** Sopra ad un piano, fissata ad una corda, una massa $m = 0.450$ kg descrive un moto circolare uniforme di raggio $r = 0.500$ m con velocità $|\vec{v}| = 2.50$ m/s. All'altro capo della corda pende immobile, da un foro ricavato al centro del piano, una seconda massa $M$. Si trovi il valore di $M$. [R: 0.574 kg]

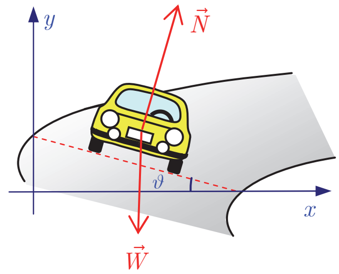



**10.** Nello spazio siderale una sonda di massa $m = 2500$ kg che procede in linea retta a 70.0 m/s deve curvare descrivendo un arco di circonferenza di raggio $R = 1.50$ km senza variare l'intensità della velocità. Calcolare la spinta che dev'essere esercitata lateralmente dai razzi del motore. [R $8.17 \times 10^3$ N]

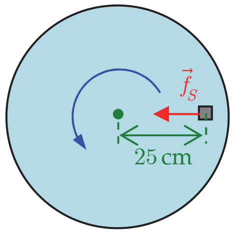
**11.** Un'automobile di massa $m$ tenta di eseguire il "giro della morte" lungo una pista circolare di raggio $R$. Si trovi la velocità minima $\vec{v}_a$ con la quale deve arrivare nel punto più alto della pista, riflettendo sul fatto che a fornire la forza centripeta necessaria in quel punto sono la normale alla pista e la gravità. [R: $\sqrt{gR}$ ]




**12.** Un'automobile di massa $m$ percorre una curva di raggio $R = 150$ m alla velocità di $15.0$ m/s. Sapendo che la strada è inclinata ed indicato con $\vartheta$ l'angolo che essa forma con l'orizzontale, si trovi il valore di $\vartheta$ che permette all'auto di percorrere la curva anche in assenza di attrito fra pneumatici ed asfalto. [R: $8.69°$ ]



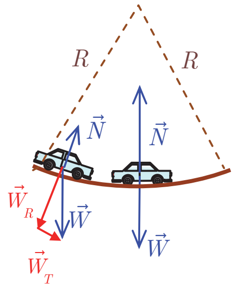

**13.** Un disco ruota su di un piano orizzontale compiendo $33$ giri/min. Ad una distanza di $25.0$ cm dal centro viene appoggiato un blocchetto di massa $m$. Sapendo che il coefficiente di attrito statico fra blocco e disco vale $\mu_s = 0.150$ si dica se il blocchetto scivola. [R: si]



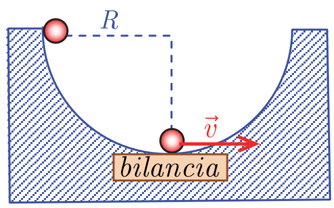

**14.** Si determinino velocità ed accelerazione centripeta di un punto sulla superficie terrestre che si trovi alla latitudine italiana, sapendo che $R_T = 6.378 \times 10^6$ m.

[R: $344$ m/s, $2.50 \times 10^{-2}$ m/s$^2$ ]

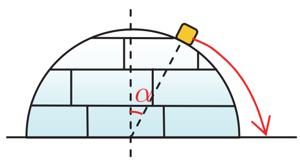
**15.** Un ponte sospeso forma un arco di circonferenza incurvato verso il basso, di raggio $R = 200$ m. Sul cartello di avvertimento si legge che il ponte sopporta al massimo un carico di $1.50 \times 10^4$ N. Quale limite di velocità deve rispettare un'automobile di massa $1200$ kg se vuole attraversare il ponte senza che questo si rompa? [R: $23.2$ m/s ]

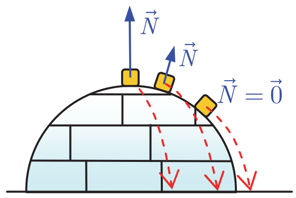



**16.** Una sfera di massa $m = 1.25$ kg viene fatta scivolare lungo una guida circolare di raggio $R = 3.00$ m, sul cui punto più basso è inserita una bilancia. Sapendo che al passaggio della sfera la bilancia segna $3.75$ kg, si calcoli la velocità dell'oggetto in quell'istante. [R: $7.67$ m/s ]




**17.** Un blocco di massa $m$, scivola lungo un igloo semisferico di raggio $R$, partendo dal punto più alto con una velocità piccola, praticamente nulla. Se l'igloo non ci fosse, il blocco seguirebbe sin dall'inizio una traiettoria parabolica di caduta libera, che si troverebbe nello spazio occupato dal ghiaccio. A mano a mano che procede la discesa, questa traiettoria ipotetica si va aprendo sempre più perché aumenta l'intensità della velocità con cui la caduta libera dovrebbe avere inizio. Nell'istante in cui la parabola diventa tutta esterna all'igloo, il blocco non viene più premuto contro il ghiaccio e così si stacca. Calcolare la velocità in quell'istante. [R: $\sqrt{Rg\cos\alpha}$ ]




***Qual è la direzione dell'accelerazione nel caso più generale?***

Poniamo di avere un punto che si muove su una traiettoria curvilinea in due dimensioni.